Ecuaciones de las cónicas

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría. Grupo A

Parábola	
Definición: Lugar de puntos del plano que equidistan de una recta llamada *directriz y de un punto fijo llamado* foco $F = (a, b)$ *exterior a dicha recta*.	
Elementos geométricos ▪ Eje: Recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. ▪ Vértice: Punto de corte del eje con la parábola. Recordemos que el vértice es el punto medio del foco y su proyección ortogonal sobre la directriz.	
Propiedades: ▪ **Simetría**: La parábola es simétrica con respecto a su eje. ▪ **Reflectora**: Sea P un punto de la parábola. La recta tangente a la parábola en el punto P forma ángulos iguales con: 1. La recta que pasa por P y el foco F. 2. La recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola.	
Ecuación de la parábola	
Directriz horizontal $r \equiv y = d$ $$y = \frac{1}{2(b-d)}(x-a)^2 + \frac{b+d}{2}$$	**Directriz vertical** $r \equiv x = d$ $$x = \frac{1}{2(a-d)}(y-b)^2 + \frac{a+d}{2}$$

Elipse

Definición: Conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados *focos* es constante $2a$ siendo $2a >$ distancia(F_1, F_2).

Elementos geométricos

- Eje mayor: Recta que une los focos
- Vértices: Puntos de corte de la elipse con el eje mayor.
- Centro: Punto medio de los focos. Coincide con el punto medio de los vértices.
- Eje menor: Recta perpendicular al eje mayor que pasa por el centro.
- Distancia focal: Distancia entre los focos. En las coordenadas anteriores es el valor $2c$.
- Longitud del eje mayor (también llamado *eje mayor*): Distancia entre los vértices. Coincide con el valor $2a$. Se denomina semieje mayor a la mitad de la longitud del eje mayor.
- Longitud del eje menor (también llamado *eje menor*): Longitud del segemento de eje menor contenido en la elipse. Coincide con el valor $2b$. Se denomina semieje menor a la mitad de la distancia del eje menor.

Propiedades:

- **Simetría**: La elipse es simétrica con respecto a sus ejes mayor y menor.
- **Reflectora**: Sea P un punto de la elipse. La recta tangente a la elipse en P forma ángulos iguales con las rectas que pasan por P y por cada uno de los focos de la elipse.

Ecuación de la Elipse

Eje mayor horizontal $y = y_0$	Eje mayor vertical $x = x_0$
$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = b^2 + c^2$	$\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1, \quad a^2 = b^2 + c^2$
Focos: $F_1 = (x_0 + c, y_0)$ y $F_2 = (x_0 - c, y_0)$ Vértices: $V_1 = (x_0 + a, y_0)$ y $V_2 = (x_0 - a, y_0)$ Centro: (x_0, y_0).	Focos: $F_1 = (x_0, y_0 + c)$ y $F_2 = (x_0, y_0 - c)$ Vértices: $V_1 = (x_0, y_0 + a)$ y $V_2 = (x_0, y_0 - a)$ Centro: (x_0, y_0).

HIPÉRBOLA

Definición: Conjunto de puntos del plano cuya diferencia de distancias (en valor absoluto) a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados *focos*, es constante $2a$, siendo $2a <$ distancia(F_1, F_2).

Elementos geométricos

- VÉRTICES: Puntos de corte de la hipérbola con la recta que pasa por los focos.
- CENTRO: Punto medio de los focos. Coindice con el punto medio de los vértices.
- EJE TRANSVERSAL: Segmento de recta que une los vértices. En las coordenadas anteriores, la longitud del eje transversal es $2a$.

Propiedades:

- **Simetría**: La hipérbola es simétrica con respecto a su eje transversal y también respecto de la recta perpendicular a él que pasa por el centro.
- **Reflectora**: La recta tangente a la hipérbola en un punto P forma ángulos iguales con las rectas que pasan por P y por cada foco.

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Eje transversal horizontal $y = y_0$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = c^2 - b^2$$

Focos: $F_1 = (x_0 + c, y_0)$ y $F_2 = (x_0 - c, y_0)$
Vértices: $V_1 = (x_0 + a, y_0)$ y $V_2 = (x_0 - a, y_0)$
Centro: (x_0, y_0).

Eje transversal vertical $x = x_0$

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} - \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = -1, \quad a^2 = c^2 - b^2$$

Focos: $F_1 = (x_0, y_0 + c)$ y $F_2 = (x_0, y_0 - c)$
Vértices: $V_1 = (x_0, y_0 + a)$ y $V_2 = (x_0, y_0 - a)$
Centro: (x_0, y_0).

Clasificación de cónicas

La **ecuación general** de una cónica (no necesariamente con eje paralelo a los ejes coordenados) viene dada por un polinomio de grado 2 en las coordenadas x e y de la forma:

$$0 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (x, y, 1)\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que la segunda igualdad nos permite escribir la ecuación de forma matricial. El siguiente criterio nos permite decidir el tipo de cónica según la matriz que representa a su ecuación.

Llamaremos:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad N = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Criterio de clasificación

Si $|M|$ y $|N|$ representa el determinante de M y N entonces:

1. Si $|M| = 0$, la ecuación no define ninguna cónica (caso degenerado).
2. Si $|M| \neq 0$, entonces:
   - $|N| = 0 \Rightarrow$ **parábola**
   - $|N| < 0 \Rightarrow$ **hipérbola**
   - $|N| > 0$ y $|M|$ tiene signo opuesto al de $A + C \Rightarrow$ **elipse**
   - $|N| > 0$ y $|M|$ tiene el signo de $A + C \Rightarrow$ no hay puntos que cumplan la ecuación